TUTORATO ALGEBRA LINEARE – 21/03/25

ESERCIZI FOGLIO 2.

Esercizio 1. Consideriamo i seguenti vettori in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

a) Trovare una base di $\mathrm{Span}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Span}(v_3, v_4)$ nei casi dove $a = 4$ o $a = 5$.

b) Esiste un valore di a tale che $\dim(\mathrm{Span}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Span}(v_3, v_4)) = 2$?

a) $W = \underset{\substack{\cup\!\!\!| \\ W}}{\mathrm{Span}(v_1, v_2)} \cap \underset{\substack{\cup\!\!\!| \\ W}}{\mathrm{Span}(v_3, v_4)}$ $\Rightarrow \dim W \leq 2$.

a.1) $a = 4$ $\qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 v_1$

$\Rightarrow \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1)$

$\Rightarrow W \subseteq \mathrm{Span}(v_1) \Rightarrow \dim W \leq 1$.

Ricordiamo che $\dim(W) = \overbrace{\dim(\mathrm{Span}(v_1))}^{1} + \overbrace{\dim(\mathrm{Span}(v_3, v_4))}^{2} - \dim(\mathrm{Span}(v_1, v_3, v_4))$

$\dim W$: $1 \Leftrightarrow$ lin DIP; $0 \Leftrightarrow$ lin INDIP (v_1, v_3, v_4)

$$\begin{array}{ccc} v_3 & v_4 & v_1 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 PIVOT $\Rightarrow v_3, v_4, v_1$ lin DIP. $(\Rightarrow v_1 \in \mathrm{Span}(v_3, v_4))^*$

Quindi $W = \mathrm{Span}(v_1) \cap \mathrm{Span}(v_3, v_4) = \mathrm{Span}(v_1)$

* osserviamo che in effetti $v_1 = v_3 + v_4$

a.2) $a = 5$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

ora si vede facilmente che v_1, v_2 sono lin. INDIP.

$\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ ha dimensione 2.

$v_1 \in \mathrm{Span}(v_3, v_4) \implies \mathrm{Span}(v_1) \subseteq \mathrm{Span}(v_3, v_4)$

$\mathrm{Span}(v_1) \subseteq W \implies \dim W$ $\begin{cases} 1 & \leftarrow \text{nel caso } W = \mathrm{Span}(v_1) \\ 2 & \leftarrow \text{quando?} \end{cases}$

$\dim W = 2 \iff \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_3, v_4)$

$\implies v_2 \in \mathrm{Span}(v_3, v_4)$

Ma $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_3, v_4)$, infatti la matrice

$$\begin{array}{ccc} v_3 & v_4 & v_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha 3 PIVOT, quindi $\dim W = 1$ e di nuovo $W = \mathrm{Span}(v_1)$.

$$\underbrace{\dim W}_{1} = \underbrace{\dim(\mathrm{Span}(v_1, v_2))}_{2} + \underbrace{\dim(\mathrm{Span}(v_3, v_4))}_{2} - \underbrace{\dim \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)}_{3}$$

b) Supponiamo $\dim W = 2$ e cerchiamo delle condizioni su a.

$$\cancel{\underbrace{\dim W}_{2}} = \underbrace{\dim(\mathrm{Span}(v_1, v_2))}_{1 \text{ o } 2} + \cancel{\underbrace{\dim(\mathrm{Span}(v_3, v_4))}_{2}} - \underbrace{\dim \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)}_{1 \text{ o } 2}$$

$$\implies \dim(\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = \dim(\mathrm{Span}(v_1, v_2)) \in \{1, 2\}.$$

$$\dim(\mathrm{Span}(\cancel{v_1}, v_2, v_3, v_4)) = \dim(\mathrm{Span}(v_2, \underbrace{v_3, v_4}_{\text{lin. indip. (già visto)}})) \geq 2$$

$v_1 \in \mathrm{Span}(v_3, v_4)$ (già visto)

Come prima, se $\dim(\mathrm{Span}(v_2, v_3, v_4)) = 2$, si deve avere

$$v_2 \in \mathrm{Span}(v_3, v_4).$$

Vediamo per quali valori di a è vero.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_3 & v_4 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & a \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & a+4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$$

Ho 2 pivot ($\iff v_3, v_4, v_2$ lin DIP.)

se e solo se $a-4=0$, cioè $a=4$.

Quindi $\dim W = 2 \implies a = 4$.

$\not\Longleftarrow$

Tuttavia, per $a=4$ abbiamo già visto che $\dim W = 1$

$(v_2 = 2 \cdot v_1)$

quindi NON esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\dim W = 2$.

Esercizio 2. Sia $V = \text{Span}(A_1, A_2, A_3) \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, dove

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare la dimensione di V.

b) Sia $W \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici dove la seconda riga è uguale a $(0,0)$. Calcolare la dimensione di $V \cap W$ e di $V + W$.

a) Come già visto (Tutorato 27/02) possiamo considerare i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

come spazi vettoriali (!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivot $\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 lin. INDIP.

(A_1, A_2, A_3 lin. INDIP.)

$$\dim V = \dim \text{Span}(A_1, A_2, A_3) = 3.$$

b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$= \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$

Con la nostra identificazione, abbiamo $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$

Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ si ha $v = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$?

Quando la matrice $(v_1 | v_2 | v_3 | v)$ ha 3 PIVOT.

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \multicolumn{4}{c}{\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & b \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

Ci sono 3 PIVOT $\iff a = 0$

Quindi (se $a=0$) si ha $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$ cioè $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$.

In $V \cap W$ c'è tutto $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Se $a \neq 0$, allora $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin V$ $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ PIVOT} \Rightarrow \text{i vettori} \\ v_1, v_2, v_3, v_4 \text{ sono} \\ \text{lin. INDIP. quindi} \\ v_4 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \end{array} \right.$

Poiché $V + W \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, si ha $\dim(V+W) \le 4$, ma abbiamo appena visto che $A_1, A_2, A_3, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V + W$ con $a \neq 0$ e sono lin. indip. $\Rightarrow \dim(V+W) = 4$

$\Rightarrow \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W) = 3 + 2 - 4 = 1$.

Esercizio 3. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione linare tale che

$$\phi\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \quad \phi\left(\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}.$$

a) Determinare la dimensione di $\mathrm{Ker}(\phi)$.

b) Calcolare

$$\phi\left(\begin{bmatrix}8\\13\\18\end{bmatrix}\right).$$

c) Partendo dei dati sopra si può determinare

$$\phi\left(\begin{bmatrix}8\\13\\20\end{bmatrix}\right)?$$

a) $$\mathrm{Span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}}_{\text{lin. indip}}\Big) \underset{=}{\subseteq} \mathrm{im}\,\phi \underset{=}{\subseteq} \mathbb{R}^2$$

perché sia il primo, sia l'ultimo hanno dimensione 2

$$\Rightarrow \quad \dim(\mathrm{im}\,\phi) = 2.$$

Ricordando che $\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = \dim(\mathrm{Ker}\,\phi) + \underbrace{\dim(\mathrm{im}\,\phi)}_{2}$

Troviamo $\dim(\mathrm{Ker}\,\phi) = 1$.

b) se $\begin{pmatrix}8\\13\\18\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right)$, allora possiamo calcolare

$\phi\begin{pmatrix}8\\13\\18\end{pmatrix}$: nel caso, abbiamo bisogno di trovare $a,b \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{pmatrix}8\\13\\18\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

da cui $\phi\begin{pmatrix}8\\13\\18\end{pmatrix} = \phi\left(a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) = a\phi\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\phi\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

Troviamo a, b risolvendo il sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 13 \\ 3 & 4 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to -R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a + 2b = 8 \\ b = 3 \end{cases}, \text{ cioè } \quad a = 2,\ b = 3.$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \phi \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} + 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\phi\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

c) Se $v \notin \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$, i dati NON ci permettono di calcolare $\phi(v)$.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \ ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 13 \\ 3 & 4 & 20 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$, quindi NON possiamo calcolare $\phi\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio delle polinomi reali di grado ≤ 2 e sia $\rho : \overbrace{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}^{V} \to \mathbb{R}^2$ la mappa

$$f \mapsto \rho(f) := \begin{bmatrix} f(0) + f(1) \\ f(0) + 2f(1) \end{bmatrix}.$$

a) Verificare che ρ è un'applicazione lineare.
b) Determinare una base di $\mathrm{Ker}(\rho)$.
c) Scrivere la matrice di ρ rispetto alle basi standard $(1, x, x^2)$ e $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$.
d) Scrivere la matrice di ρ rispetto alle basi $(1, (1+x), (1+x)^2)$ e $\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$.

la prossima volta

Ricordo le definizioni:
(somma e prodotto per scalare di polinomi)

- $f, g \in V \Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $f \in V, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

a) ADDITIVITÀ:

$$\forall f, g \in V \qquad \rho(f+g) = \begin{pmatrix} (f+g)(0) + (f+g)(1) \\ (f+g)(0) + 2(f+g)(1) \end{pmatrix}$$

non dimenticate i quantificatori!

Definizione di + tra polinomi

$$= \begin{pmatrix} f(0) + g(0) + f(1) + g(1) \\ f(0) + g(0) + 2f(1) + 2g(1) \end{pmatrix}$$

proprietà commutativa di + in $\mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} f(0) + f(1) \\ f(0) + 2f(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(0) + g(1) \\ g(0) + 2g(1) \end{pmatrix}$$

$$= \rho(f) + \rho(g).$$

PRODOTTO PER SCALARE:

$$\forall f \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \rho(\lambda f) = \begin{pmatrix} \overbrace{(\lambda f)(0)}^{\lambda \cdot f(0)} + \overbrace{(\lambda f)(1)}^{\lambda \cdot f(1)} \\ \overbrace{(\lambda f)(0)}^{\lambda f(0)} + \overbrace{2(\lambda f)(1)}^{2\lambda f(1)} \end{pmatrix} = \lambda \overbrace{\begin{pmatrix} f(0) + f(1) \\ f(0) + 2f(1) \end{pmatrix}}^{\rho(f)}$$

Recap

$f : V \to W$ lineare

$\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\}$

b) $\ker p = \left\{ f \in V : \begin{pmatrix} f(0) + f(1) \\ f(0) + 2f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \{ f \in V : \underbrace{f(0) + f(1) = 0, \quad f(0) + 2f(1) = 0}\}$

↳ notare che è equivalente a $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

$f = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in V \qquad \begin{cases} f(0) = a_0 \\ f(1) = a_2 + a_1 + a_0 \end{cases}$

$\ker p = \left\{ a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \in V : \begin{array}{l} a_2 + a_1 + 2a_0 = 0 \\ 2a_2 + 2a_1 + 3a_0 = 0 \end{array} \right.$

$\left(V \cong \mathbb{R}^3 \qquad a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right)$

Il generico polinomio di $\ker p$ è $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con

$\begin{cases} a_2 = -a_1 - 2a_0 \\ 2a_2 + 2a_1 + 3a_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = -a_1 - 2a_0 \\ \cancel{-2a_1} - 4a_0 + \cancel{2a_1} + 3a_0 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a_2 = -a_1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

cioè, è della forma: $a_2 x^2 - a_2 x = a_2 (x^2 - x)$.

Quindi $\operatorname{Ker}\rho = \operatorname{Span}(x^2 - x)$.

<u>Oss.</u> Equivalentemente, si ha:

$$\begin{cases} f(0) + f(1) = 0 \\ f(0) + 2f(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 + a_1 + a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_2 \end{cases}$$

c) Calcolando, troviamo:

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \rho(x) = \rho(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice di ρ nelle basi standard $1, x, x^2$ di V e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ è data da:

$$\left(\rho(1) \mid \rho(x) \mid \rho(x^2) \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

sono già espressi in coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Prossimo Tutorato (27/03, AULA D3, 14.00).